

DIE ASYMPTOTISCHEN LÖSUNGEN FÜR VORGÄNGE DES ERSTARRENS

K. STEPHAN und B. HOLZKNECHT

Institut für Technische Thermodynamik und Thermische Verfahrenstechnik der Universität Stuttgart,
D-7000 Stuttgart 1, FRG

(Received 12 June 1975)

Zusammenfassung—Ein Näherungsverfahren zur Berechnung von Temperaturen und Phasenwachstum bei Erstarrungsvorgängen, das auf einer asymptotischen Entwicklung für große Werte der Phasenübergangszahl beruht, wird auf geometrisch einfache Formen des erstarrenden Körpers angewandt. Wie der Vergleich mit einer numerischen Lösung zeigt, ist bei der Erstarrung an einer ebenen Platte die Näherung im Bereich der Phasenübergangszahlen $Ph = h_s/c_s(T_s - T_u) > 0,5$ für technische Anwendungen ausreichend genau. Für die Erstarrung eines Hohlzylinders bleibt der Fehler in der Erstarrungsgeschwindigkeit für $Ph \geq 1$ unter 2,6% bzw. unter 1,2% für $Ph \geq 2$, während bei der Hohlkugel der Fehler unter 3,8% bleibt für $Ph \geq 1$ bzw. unter 1,3% für $Ph \geq 2$. Der Fehler fällt sehr rasch mit zunehmenden Phasenübergangszahlen.

FORMELZEICHEN

a_s ,	Temperaturleitfähigkeit, $a_s = \lambda_s/\rho_s c_s$;
Bi ,	Biot-Zahl, $Bi = kx_0/\lambda_s$;
c_s ,	spezifische Wärmekapazität der erstarrten Schicht;
h_s ,	Erstarrungsenthalpie;
k ,	Wärmedurchgangskoeffizient der Kühlwand;
n ,	Formfaktor;
N ,	Anzahl der berücksichtigten Reihenglieder;
Ph ,	Phasenübergangszahl, $Ph = h_s/c_s(T_s - T_u)$;
r_{ξ} ,	relativer Fehler der Erstarrungsgeschwindigkeit;
T ,	Temperatur;
T_s ,	Erstarrungstemperatur;
T_u ,	Temperatur des Kühlmittels;
t ,	Zeit;
x ,	Ortskoordinate;
x_0 ,	Radius des Zylinders oder der Kugel, für die ebene Platte gilt $x_0 = \lambda_s/k$;
X ,	dimensionslose Ortskoordinate, $X = x/x_0$;
α ,	Funktion in Gleichung (20);
β ,	reziproke Biot-Zahl, $\beta = 1/Bi$;
θ ,	dimensionslose Temperatur, $\theta = (T - T_u)/(T_s - T_u)$;
θ_j ,	Funktion in der Reihenentwicklung Gleichung (11);
λ_s ,	Wärmeleitfähigkeit der erstarrten Schicht;
ξ ,	Koordinate der Phasengrenze;
ξ^* ,	dimensionslose Koordinate der Phasengrenze, $\xi^* = \xi/x_0$;
ξ_j^* ,	Funktion in der Reihenentwicklung Gleichung (12);
ρ_s ,	Dichte der erstarrten Schicht;
τ ,	dimensionslose Zeit, $\tau = \lambda_s(T - T_u)t/\rho_s h_s x_0^2$.

1. EINLEITUNG

OBWOHL für viele Erstarrungsvorgänge numerische Lösungen bekannt sind, wird man Näherungslösungen immer dann bevorzugen, wenn ein analytischer Zusammenhang zwischen den Variablen gesucht ist. Im

Folgenden wird ein Näherungsverfahren vorgestellt, das auf einer asymptotischen Entwicklung für große Werte der Phasenübergangszahl $Ph = h_s/c_s(T_s - T_u)$ beruht. Es wird auf die Erstarrung einfacher Körper, wie ebene Platte, Zylinder und Hohlzylinder sowie Kugel und Hohlkugel angewendet. Kompliziertere Gebilde kann man sich näherungsweise aus diesen einfachen Körpern aufgebaut denken. Für die Erstarrung an einer ebenen Platte haben Locke *et al.* [1, 2] eine asymptotische Näherung angegeben, die für eine vorgegebene, zeitlich variable Temperatur der Kühlwand gilt. Pedroso und Domoto [3, 4] haben die asymptotische Näherungslösung für die Erstarrung einer Kugel und Hohlkugel bei konstanter Kühlwandtemperatur berechnet. Sie umgehen die Singularität bei der Erstarrung des Kugelmittelpunktes durch Einführung einer Koordinatentransformation. Riley *et al.* [5] modifizieren die asymptotische Näherung für die Erstarrung eines Zylinders und einer Kugel durch Unterteilung in zwei Abschnitte und Einführung einer Substitution. Auch hier ist die Temperatur der Kühlwand konstant. Für den Fall der ebenen Platte haben Huang und Shih [6] kürzlich eine asymptotische Lösung mitgeteilt, die für endlichen Wärmeübergang an das Kühlmittel und einen konstanten nicht verschwindenden Wärmestrom zwischen flüssiger und fester Phase gilt. Dagegen werden in der folgenden Rechnung die asymptotischen Lösungen für die Erstarrung an ebenen zylinder- oder kugelförmigen Körpern entwickelt unter der Annahme eines endlichen Wärmeübergangs an der Kühlwand, und es werden daraus einfache Näherungsformeln zur Berechnung von Erstarrungszeiten ermittelt.

2. DIE ERSTARRUNG GEOMETRISCH EINFACHER KÖRPER

Die Erstarrung vor einer Platte oder an der Innen- und Außenseite eines zylindrischen Rohres oder einer Kugelschale läßt sich bei geometrisch eindimensionaler Wärmeleitung durch ein einheitliches Gleichungssystem beschreiben. Bild 1 zeigt als Beispiel die

Erstarrung im Inneren oder an der Außenseite eines Rohres. In der erstarrten Schicht gilt die Wärmeleitgleichung

$$\partial T / \partial t = a_s (\partial^2 T / \partial x^2 + n/x \cdot \partial T / \partial x) \quad (1)$$

mit $n = 0$ für die ebene Platte,
 $n = 1$ für den Zylinder oder
 $n = 2$ für die Kugel.

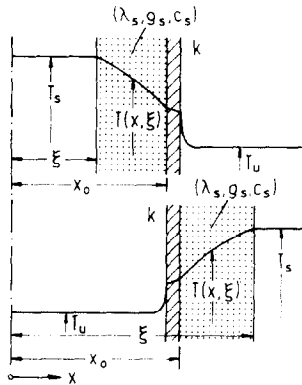


BILD 1. Temperaturen bei der Erstarrung an der Innen- und Außenseite eines Zylinders.

An der Oberfläche $x = \xi$ herrscht

$$\text{Erstarrungstemperatur } T = T_s. \quad (2)$$

An der Kühlwand $x = x_0$ wird ein endlicher Wärmestrom

$$\lambda \partial T / \partial x = \pm k(T - T_u) \quad (3)$$

an das Kühlmittel abgeführt. Das positive Vorzeichen gilt bei Erstarrung an der Außenseite ($\xi > x_0$), das negative Vorzeichen bei Erstarrung an der Innenseite ($\xi < x_0$). Der Wärmedurchgangskoeffizient k enthält den Wärmeübergangswiderstand im Kühlmittel und den Wärmeleitwiderstand der Kühlwand. Als weitere Bedingung gilt die Energiebilanz an der Phasengrenzfläche $x = \xi$

$$\rho_s h_s d\xi/dt = \lambda_s \partial T / \partial x \quad (4)$$

mit der Anfangsbedingung

$$t = 0: \quad \xi = x_0. \quad (5)$$

Um die Zahl der Einflußgrößen zu verringern, werden dimensionslose Größen eingeführt:

$$\theta = (T - T_u) / (T_s - T_u), \quad \tau = \lambda_s (T_s - T_u) t / \rho_s h_s x_0^2, \\ X = x / x_0, \quad \xi^* = \xi / x_0$$

sowie die Biot-Zahl $Bi = kx_0 / \lambda_s$ und die Phasenübergangszahl

$$Ph = h_s / c_s (T_s - T_u).$$

Die als Bezugslänge verwendete Koordinate der Kühlwand x_0 ist gleich dem Zylinder- oder Kugelradius, vgl. Bild 1. Für die Platte ist die Bezugslänge beliebig wählbar und wird gleich λ_s / k gesetzt, was $Bi = 1$ entspricht.

Die Gleichungen (1)–(5) lauten in dimensionsloser Form:

$$1/Ph \cdot \partial \theta / \partial \tau = \partial^2 \theta / \partial X^2 + n/X \cdot \partial \theta / \partial X \quad (6)$$

$$X = \xi^*: \quad \theta = 1 \quad (7)$$

$$X = 1: \quad \partial \theta / \partial X = \pm Bi \cdot \theta \quad (8)$$

$$X = \xi^*: \quad d\xi^* / d\tau = \partial \theta / \partial X \quad (9)$$

$$\tau = 0: \quad \xi^* = 1. \quad (10)$$

3. DIE ASYMPTOTISCHEN NÄHERUNGEN

Die im Folgenden vorgestellte Näherung geht von asymptotischen Entwicklungen der Temperaturverteilung und der Erstarrungsgeschwindigkeit für große Phasenübergangszahlen aus

$$\theta = \theta_0 + Ph^{-1} \theta_1 + Ph^{-2} \theta_2 + \dots \quad (11)$$

$$d\xi^* / d\tau = \xi_0^* + Ph^{-1} \xi_1^* + Ph^{-2} \xi_2^* + \dots \quad (12)$$

mit $\theta_i(X, \tau)$ und $\xi_i^*(\tau)$. Während bisherige Näherungen die Temperaturverteilung durch ein Polynom approximieren [7, 8], wird hier eine Funktionenreihe für die Temperatur und die Erstarrungsgeschwindigkeit gewählt, die insofern zweckmäßig erscheint, als die Phasenübergangszahl Ph vieler Stoffe hinreichend große Werte $Ph > 1$ annimmt. Der Typ der Funktionen $\theta_i(X, \tau)$ und $\xi_i^*(\tau)$ hängt bei vorgegebenen Randbedingungen von der geometrischen Form des Körpers ab.

Setzt man die Ansätze (11) und (12) in die Wärmeleitgleichung (6) unter Beachtung der Beziehung $\partial \theta / \partial \tau = \partial \theta / \partial \xi^* \cdot d\xi^* / d\tau$ ein, so ergibt sich durch Koeffizientenvergleich für die Funktionen θ_i ein System von Differentialgleichungen

$$0 = \partial^2 \theta_0 / \partial X^2 + n/X \cdot \partial \theta_0 / \partial X$$

$$\partial \theta_0 / \partial \xi^* \cdot \xi_0^* = \partial^2 \theta_1 / \partial X^2 + n/X \cdot \partial \theta_1 / \partial X$$

$$\partial \theta_1 / \partial \xi^* \cdot \xi_0^* + \partial \theta_0 / \partial \xi^* \cdot \xi_1^* = \partial^2 \theta_2 / \partial X^2 + n/X \cdot \partial \theta_2 / \partial X \dots \quad (13)$$

Um die Gleichungen (7) und (8) zu erfüllen, müssen die einzelnen Gleichungen dieses Systems folgenden Randbedingungen genügen:

$$X = \xi^*: \quad \theta_0 = 1$$

$$\theta_1 = 0 \quad (14)$$

$$\theta_2 = 0 \dots$$

$$X = 1: \quad \partial \theta_0 / \partial X = \pm Bi \cdot \theta_0$$

$$\partial \theta_1 / \partial X = \pm Bi \cdot \theta_1 \quad (15)$$

$$\partial \theta_2 / \partial X = \pm Bi \cdot \theta_2 \dots$$

Aus der Energiebilanz an der Phasengrenzfläche (9) erhält man Gleichungen zur Berechnung der Funktionen ξ_i^* :

$$X = \xi^*: \quad \xi_0^* = \partial \theta_0 / \partial X$$

$$\xi_1^* = \partial \theta_1 / \partial X \quad (16)$$

$$\xi_2^* = \partial \theta_2 / \partial X \dots$$

Aus dem Gleichungssystem (13) bis (16) kann man die Funktionen θ_i und ξ_i^* rekursiv berechnen. Die Funktionen θ_0 und ξ_0^* sind identisch mit der sogenannten quasistationären Näherung [7], wie man

am Verschwinden des kapazitiven Termes in der ersten der Gleichungen (13) erkennt. Sie gilt für $Ph \rightarrow \infty$; dann ist nach den Ansätzen (11) und (12) $\theta = \theta_0$ und $d\xi^*/d\tau = \xi_0^*$.

Als Lösung des vorigen Gleichungssystems erhält man für die Erstarrung vor einer Platte mit $Bi = 1$ die Funktionen ξ_i^* zu

$$\xi_0^* = \xi^{*-1} \tag{17.1}$$

$$\xi_1^* = -\xi^{*-4}[(\xi^* - 1)^3/3 + (\xi^* - 1)^2 + (\xi^* - 1)] \tag{17.2}$$

$$\xi_2^* = \xi^{*-7}[14/90 \cdot (\xi^* - 1)^6 + 14/15 \cdot (\xi^* - 1)^5 + 7/3 \cdot (\xi^* - 1)^4 + 3(\xi^* - 1)^3 + 2(\xi^* - 1)^2] \tag{17.3}$$

$$\xi_3^* = -\xi^{*-10}[79/945 \cdot (\xi^* - 1)^9 + 79/105(\xi^* - 1)^8 + 316/105 \cdot (\xi^* - 1)^7 + 314/45 \cdot (\xi^* - 1)^6 + 154/15 \cdot (\xi^* - 1)^5 + 29/3 \cdot (\xi^* - 1)^4 + 17/3 \cdot (\xi^* - 1)^3] \dots \tag{17.4}$$

Für die Erstarrung vor der Innen- und Außenwand eines zylindrischen Rohres ist mit $\beta = 1/Bi$

$$\xi_0^* = \xi^{*-1}(\ln \xi^* + \beta)^{-1} \tag{18.1}$$

$$\xi_1^* = -\xi^{*-3}(\ln \xi^* + \beta)^{-4}[\beta^2(\xi^{*2} - 1) + \beta(2\xi^{*2} \ln \xi^* - \xi^{*2} + 1) + \xi^{*2}(\ln^2 \xi^* - \ln \xi^*) + (\xi^{*2} - 1)/2] / 2 \dots \tag{18.2}$$

und für die Erstarrung vor der Innen- und Außenwand einer Kugel

$$\xi_0^* = \xi^{*-2}(\beta + 1 - 1/\xi^*)^{-1} \tag{19.1}$$

$$\xi_1^* = -\xi^{*-6}(\beta + 1 - 1/\xi^*)^{-4}[(\beta + 1)^2(\xi^{*3} - 1)/3 - (\beta + 1)(\xi^{*2} - 1) + \xi^* - 1] \dots \tag{19.2}$$

4. GENAUIGKEIT DER ASYMPTOTISCHEN NÄHERUNGEN

Eine Fehlerabschätzung der asymptotischen Näherungen ist leicht durchzuführen, da die Funktionenreihen alternieren. Daher muß beispielsweise der Fehler der aus den ersten beiden Reihengliedern bestehenden zweiten Näherung kleiner sein als die Differenz zwischen den aus zwei und drei Reihengliedern bestehenden Näherungen. Um eine möglichst genaue Aussage über den Fehler zu erhalten, wird die Näherung im Folgenden mit der numerischen Lösung von Stephan und Holzknacht [9] verglichen, die mit einem maximalen absoluten Fehler von 10^{-4} in der Erstarrungszeit τ behaftet ist.

Bild 2 zeigt den relativen Fehler $|r_{\xi}|$ der Erstarrungsgeschwindigkeit als Funktion der Phasenübergangszahl für die Erstarrung vor einer ebenen Platte. Dabei sind $Bi = 1$ und $\xi^* = 2$ gesetzt. Die Kurve $N = 1$ gilt für die quasistationäre Näherung, also für Berücksichtigung nur des ersten Gliedes der Funktionenreihe, bei der Kurve $N = 2$ wurden zwei Glieder berücksichtigt u.s.w. Wie zu erwarten ist, benötigt man umso mehr Reihenglieder, je kleiner die Phasenübergangszahl ist. Für Werte $Ph > 2$ wird die zweite Näherung

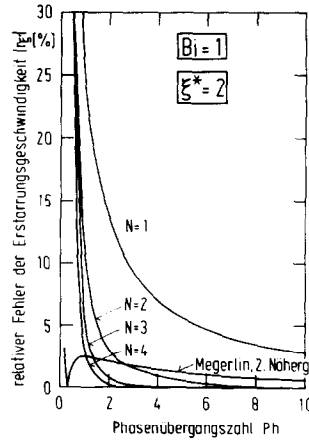


BILD 2. Fehler der asymptotischen Näherungen bei Erstarrung vor einer Platte als Funktion der Phasenübergangszahl.

ausreichen, während für $Ph \approx 1$ die vierte Näherung herangezogen werden sollte. Zum Vergleich ist auch die zweite Näherung von Megerlin [8] aufgeführt, die aus einem Polynomansatz zweiten Grades für die Temperatur als Funktion der Ortskoordinate besteht. Im Bereich kleiner Phasenübergangszahlen weist sie nur geringe Fehler auf, während sie für große Werte der Phasenübergangszahl nicht so gut konvergiert. Den Einfluß der Phasengrenzkordinate ξ^* auf den Fehler zeigt Bild 3. Oberhalb des in Bild 2 gewählten Wertes $\xi^* = 2$ nimmt der Fehler kaum noch zu.

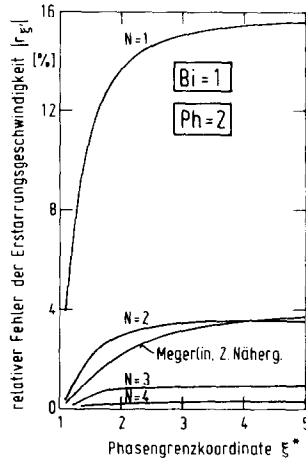


BILD 3. Fehler der asymptotischen Näherungen bei Erstarrung vor einer Platte als Funktion der Phasengrenzkordinate.

In den Bildern 4–6 sind die Fehler für die Erstarrung einer Kugel und Hohlkugel dargestellt. In Bild 4 ist der relative Fehler $|r_{\xi}|$ über der Phasengrenze ξ^* aufgetragen. Bei der Erstarrung einer Kugel ist $0 \leq \xi^* \leq 1$, bei der Hohlkugel ist $\xi^* \geq 1$. Wie man aus dem Verlauf der Kurven $N = 1$ und $N = 2$ erkennt, divergiert die Funktionenreihe offensichtlich für $\xi^* \rightarrow 0$ (vgl. [3, 4]), während für die Erstarrung einer Hohlkugel, also $\xi^* \geq 1$, die aus zwei Reihengliedern

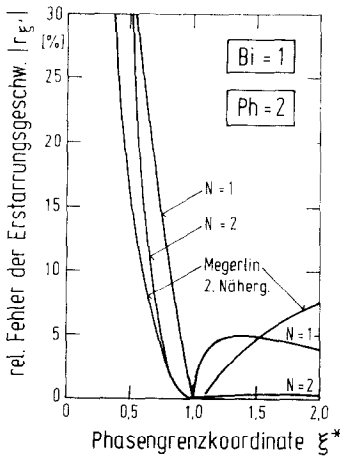


BILD 4. Erstarrung an der Innen- und Außenseite einer Kugelschale.

bestehende zweite asymptotische Näherung bereits einen wesentlich kleineren Fehler als diejenige von Megerlin aufweist.

Die Abhängigkeit des Fehlers von der Phasenübergangszahl zeigen die Bilder 5 und 6 für $Bi = 1$ und $Bi \rightarrow \infty$. Schon die zweite Näherung ist für $Ph > 1$ gut brauchbar und konvergiert rasch mit wachsenden Phasenübergangszahlen.

Die Fehler $|r_\xi|$ bei der Erstarrung eines Zylinders und Hohlzylinders sind in den Bildern 7–9 wiedergegeben. Sie sind ihrem Verlauf und ihrer Größe nach ähnlich. Nach Bild 10 ist der Fehler für kleine Biot-Zahlen noch wesentlich geringer als für $Bi = 1$ und $Bi \rightarrow \infty$, wie es die Bilder 5, 6, 8 und 9 zeigten. Er wird für $Bi \rightarrow \infty$ am größten.

Übereinstimmend für die Erstarrung einer ebenen Platte, eines Hohlzylinders und einer Hohlkugel nimmt der Fehler $|r_\xi|$ mit abnehmenden Phasenübergangszahlen und wachsenden Biot-Zahlen zu. Mit wachsender Schichtdicke durchläuft er Extremwerte, deren Lage im wesentlichen von der Biot-Zahl abhängt. Der Fehler der aus zwei Reihengliedern bestehenden zweiten asymptotischen Näherung bleibt im Bereich der Phasenübergangszahlen $Ph \geq 2$ und aller Biot-Zahlen für die ebene Platte unter 3,5% und für den Hohlzylinder und die Hohlkugel unter 3,6%. Für die Erstarrung einer ebenen Platte erhält man im Bereich $1 \leq Ph \leq 2$ etwa dieselbe Genauigkeit, wenn man die ersten vier Glieder der Funktionenreihe berücksichtigt.

5. NÄHERUNGSFORMELN FÜR DIE ERSTARRUNGSGESCHWINDIGKEITEN

Für praktische Rechnungen braucht man einfache, aber möglichst genaue analytische Näherungsformeln. Diese kann man dadurch gewinnen, daß man die Reihe in der Erstarrungsgeschwindigkeit bereits nach dem zweiten Glied abbricht.

Da die Funktionenreihen alternieren, kann man die Genauigkeit der so erhaltenen Näherung erhöhen, indem man das zweite Glied nur zu einem Bruchteil berücksichtigt, beispielsweise durch Multiplikation mit einer Funktion α , wobei $0 < \alpha < 1$ gilt. Die

Näherung lautet dann entsprechend Gl. (11)

$$\frac{d\xi^*}{d\tau} = \xi^* + \alpha \cdot Ph^{-1} \cdot \xi^{\dagger}, \tag{20}$$

wobei die Funktionen ξ^* und ξ^{\dagger} durch die Gleichungen (17.1), (17.2), (18.1), (18.2) bzw. (19.1), (19.2) gegeben sind. Durch Vergleich mit der exakten numerischen Lösung [9] wurden Korrelationen für die Funktion α aufgestellt. Sie sind im Folgenden für die Erstarrung einer ebenen Platte, eines Hohlzylinders und einer Hohlkugel aufgeführt.

Platte: $\alpha = a_0 + a_1 \ln Ph + a_2 \ln^2 Ph$
 $a_0 = 0,6959$
 $a_1 = 0,18$
 $a_2 = -0,02627.$

Die Fehler sind:

$$\begin{aligned} |r_\xi| < 4,5\% & \text{ für } Ph \geq 0,5 \text{ und } \xi^* \leq 5 \\ |r_\xi| < 1,8\% & \text{ für } Ph \geq 1 \text{ und } \xi^* \leq 5 \\ |r_\xi| < 0,6\% & \text{ für } Ph \geq 2 \text{ und } \xi^* \leq 5 \end{aligned}$$

Hohlzylinder: $\alpha = 1 + (a_1 + a_2/Bi)/Ph + (a_3 + a_4/Bi)/Ph^2$

Hohlkugel:
 $a_1 = -0,2945 \quad a_1 = -0,2642$
 $a_2 = 0,02604 \quad a_2 = 0,02968$
 $a_3 = 0,05276 \quad a_3 = 0,04778$
 $a_4 = -0,005145 \quad a_4 = -0,006284$

Die Fehler sind:

$$\begin{aligned} |r_\xi| < 8,5\% \quad |r_\xi| < 12\% & \text{ für } Ph \geq 0,5 \\ |r_\xi| < 2,6\% \quad |r_\xi| < 3,8\% & \text{ für } Ph \geq 1 \\ |r_\xi| < 1,2\% \quad |r_\xi| < 1,3\% & \text{ für } Ph \geq 2 \end{aligned}$$

Dabei gilt $0,1 \leq Bi \leq \infty$ und $\xi^* \leq 2$. Die Näherung konnte nur in den angegebenen Bereichen der Phasengrenzkoordinate ξ^* mit der numerischen Lösung verglichen werden. Der Verlauf des Fehlers in diesen Bereichen legt jedoch die Gültigkeit der Fehlerangabe auch für größere Schichtdicken nahe. Die unterbrochenen Kurven in den Bildern 6 und 9 zeigen die deutliche Verbesserung gegenüber der ursprünglichen zweiten asymptotischen Näherung.

Die Integration der Erstarrungszeit aus der Gleichung (20) ist für die ebene Platte und die Hohlkugel in geschlossener Form möglich, führt jedoch auf sehr umfangreiche Ausdrücke, die eine numerische Integration zweckmäßiger erscheinen lassen. Wie sich leicht zeigen läßt, muß der relative Fehler der Erstarrungszeit kleiner sein als der maximale Fehler der Erstarrungsgeschwindigkeit.

Die korrigierte zweite asymptotische Näherung für die Erstarrung an einer ebenen Platte ist somit trotz einfacheren Aufbaues genauer als die aus vier Reihengliedern bestehende vierte asymptotische Näherung. Sie liefert brauchbare Ergebnisse für Phasenübergangszahlen $Ph > 0,5$.

Für den Hohlzylinder und die Hohlkugel ist die korrigierte zweite asymptotische Näherung sinnvoll für Phasenübergangszahlen $Ph > 1$ und $Ph \approx 1$. In

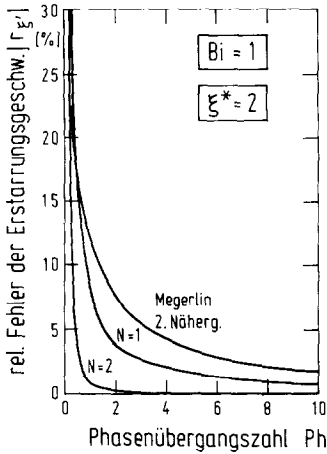


BILD 5. Erstarrung einer Hohlkugel, Abhängigkeit des Fehlers von der Phasenübergangszahl bei $Bi = 1$.

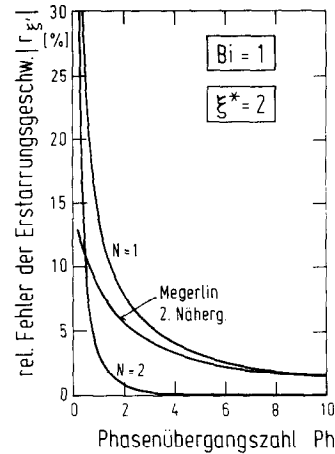


BILD 8. Erstarrung eines Hohlzylinders, Abhängigkeit des Fehlers von der Phasenübergangszahl bei $Bi = 1$.

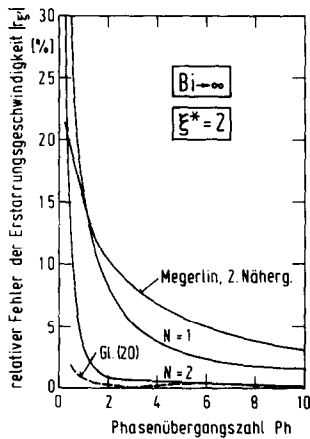


BILD 6. Erstarrung einer Hohlkugel, Abhängigkeit des Fehlers von der Phasenübergangszahl bei $Bi \rightarrow \infty$.

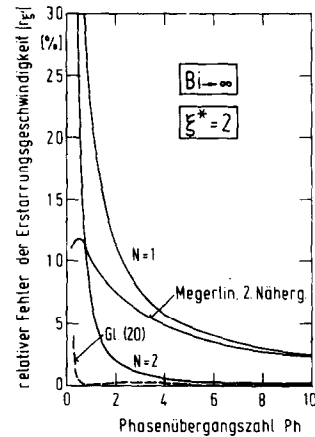


BILD 9. Erstarrung eines Hohlzylinders, Abhängigkeit des Fehlers von der Phasenübergangszahl bei $Bi \rightarrow \infty$.

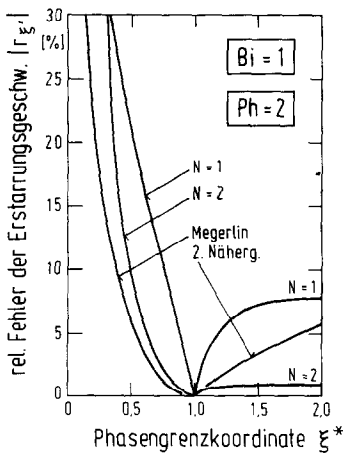


BILD 7. Erstarrung an der Innen- und Außenseite eines zylindrischen Rohres.

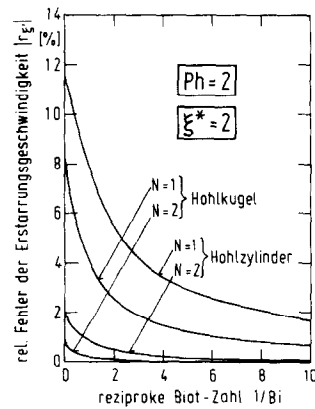


BILD 10. Erstarrung eines Hohlzylinders und einer Hohlkugel, Abhängigkeit des Fehlers von der Biot-Zahl.

diesem Bereich liegen die Phasenübergangszahlen von Wasser, feuchtem Sand und einiger Metalle, wie z.B. Zinn, sowie auch von technisch wichtigen Gasen, wie Methan, Stickstoff und Krypton.

LITERATUR

1. G. S. H. Lock, J. R. Gunderson, D. Quon und J. K. Donnelly, A study of one-dimensional ice formation with particular reference to periodic growth and decay, *Int. J. Heat Mass Transfer* **12**, 1343–1352 (1969).
2. G. S. H. Lock, On the perturbation solution of the ice-water layer problem, *Int. J. Heat Mass Transfer* **14**, 642–644 (1971).
3. R. I. Pedroso und G. A. Domoto, Perturbation solutions for spherical solidification of saturated liquids, *J. Heat Transfer* **95**, 42–46 (1973).
4. R. I. Pedroso und G. A. Domoto, Inward spherical solidification-solution by the method of strained coordinates, *Int. J. Heat Mass Transfer* **16**, 1037–1043 (1973).
5. D. S. Riley, F. T. Smith und G. Poots, The inward solidification of spheres and circular cylinders, *Int. J. Heat Mass Transfer* **17**, (12), 1507–1516 (1974).
6. C.-L. Huang und Y.-P. Shih, Perturbation solutions of planar diffusion-controlled moving-boundary problems, *Int. J. Heat Mass Transfer* **18** (5), 689–695 (1975).
7. K. Stephan, Schmelzen und Erstarren geometrisch einfacher Körper, *Kältetechnik-Klimatisierung* **23** (2), 42–46 (1971).
8. F. Megerlin, Geometrisch eindimensionale Wärmeleitung beim Schmelzen und Erstarren, *Forsch. Geb. IngWes.* **34** (2), 40–46 (1968).
9. K. Stephan und B. Holzknacht, Wärmeleitung beim Erstarren geometrisch einfacher Körper, *Wärme und Stoffübertragung* **7**, 200–207 (1974).

PERTURBATION SOLUTIONS FOR SOLIDIFICATION PROBLEMS

Abstract—Approximate solutions for determining temperatures and phase change in solidification problems, based on asymptotic expansions for large values of the phase-conversion parameter, are applied to geometrically simple forms of the solidifying body. A comparison with a numerical solution shows, that the approximate solutions of solidification on a flat plate in the range of phase-conversion parameters $Ph = h_s/c_s(T_s - T_u) > 0.5$ are sufficiently accurate for technical applications. In solidification on the outside of a cylinder the error of the solidification speed remains less than 2.6% for $Ph \geq 1$ and less than 1.2% for $Ph \geq 2$, whereas in solidification on the outside of a sphere the error remains less than 3.8% for $Ph \geq 1$ and less than 1.3% for $Ph \geq 2$. The error decreases rapidly with increasing phase-conversion parameter.

SOLUTION DE PERTURBATION DES PROBLEMES DE SOLIDIFICATION

Résumé—Des solutions approchées de la détermination des températures et changements de phase dans les problèmes de solidification, basées sur des développements asymptotiques aux valeurs élevées du paramètre de changement de phase, ont été appliquées aux formes géométriques simples du corps en solidification. La comparaison avec une résolution numérique montre que les solutions approchées de la solidification obtenues sur plaque plane, dans le domaine $Ph = h_s/C_s(T_s - T_u) > 0,5$ du paramètre de changement de phase, sont suffisamment précises pour les applications pratiques. Pour la solidification à l'extérieur d'un cylindre, l'erreur sur la vitesse de solidification reste inférieure à 2,6% pour $Ph \geq 1$ et inférieure à 1,2% pour $Ph \geq 2$, tandis que pour la solidification à l'extérieur d'une sphère, l'erreur demeure inférieure à 3,8% pour $Ph \geq 1$ et inférieure à 1,3% pour $Ph \geq 2$. L'erreur décroît rapidement avec l'augmentation du paramètre de changement de phase.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЗАТВЕРДЕВАНИЯ МЕТОДОМ ВОЗМУЩЕНИЙ

Аннотация — Для определения температуры и фазового перехода даны приближенные решения задач затвердевания тел простой геометрической формы, основанные на асимптотических разложениях больших значений параметра фазового перехода. Сравнение с численным решением показывает, что точность приближенных решений задачи затвердевания на плоской пластине в диапазоне изменения параметров фазового перехода $Ph = h_s/c_s(T_s - T_u) > 0,5$ достаточна для инженерных расчетов. При затвердевании на внешней поверхности цилиндра погрешность в вычислении скорости затвердевания меньше 2,6% при $Ph \geq 1$ и меньше 1,2% при $Ph \geq 2$, в то время как при затвердевании на внешней поверхности шара погрешность составляет меньше 3,8% при $Ph \geq 1$ и меньше 1,3% при $Ph \geq 2$. С увеличением параметра фазового перехода происходит быстрое уменьшение величины погрешности.